

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Segundo Semestre de 2021

**Mecânica Quântica**

29/09/2021 - 13h00 às 16h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

**QUESTÃO 1 – POTENCIAIS INDEPENDENTES DO TEMPO: POÇO INFINITO**

Uma partícula de massa  $m$  está confinada em um poço infinito unidimensional de largura  $L$  e potencial dado por

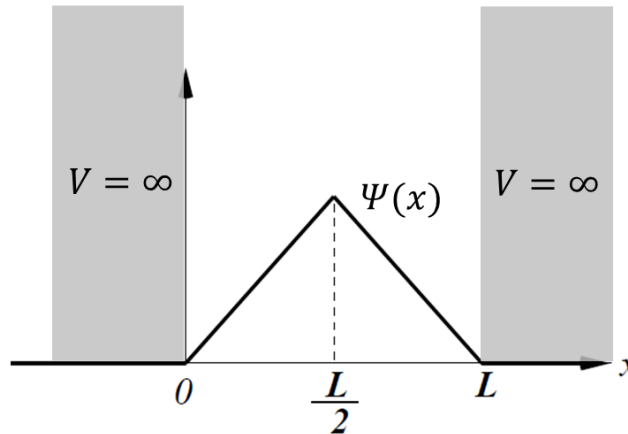
$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 < x < L; \\ \infty, & \text{para } x \leq 0 \text{ e } x \geq L, . \end{cases}$$

- (a) (20%) Mostre que para esse poço infinito as energias possíveis e suas autofunções correspondentes são dadas por

$$E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad \text{e} \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

com  $n = 1, 2, 3, \dots$ , respectivamente.

Considere agora que a função de onda  $\psi(x)$  da partícula foi preparada de tal maneira que pode ser aproximada à forma triangular ilustrada na figura abaixo.



- (b) (15%) Observando a ilustração acima, encontre a expressão matemática da função de onda *normalizada*  $\psi(x)$  para todas as regiões ilustradas na figura.
- (c) (40%) Escreva  $\psi(x)$  na base de autofunções  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1,2,3,\dots}$  e mostre que os coeficientes dessa expansão podem ser escritos na forma

$$C_n = \frac{4\sqrt{6}}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

- (d) (25%) Utilizando o item (c), mostre que o valor esperado de energia de  $\psi(x)$  é dado por  $\langle E \rangle = 6\hbar^2/(mL^2)$ . Utilize a identidade

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**QUESTÃO 2 - APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER DEPENDENTE DO TEMPO**

Um átomo de prata entra em uma região onde está aplicado um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  na direção vertical  $\mathbf{z}$ . Sabendo que o hamiltoniano do sistema pode ser escrito na forma  $\hat{H} = -\gamma \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B}$ , onde  $\gamma$  é o fator giromagnético do elétron e  $\vec{S}$  é o momento angular de spin do elétron, responda as questões abaixo.

- (a) (10%) Escreva a representação matricial do hamiltoniano na base de autovetores de  $\hat{S}_z$ .
- (b) (20%) Considerando que inicialmente o sistema se encontra no estado  $|\psi(t=0)\rangle = c_+|z+\rangle + c_-|z-\rangle$ , onde  $\hat{S}_z|z+\rangle = \hbar/2|z+\rangle$  e  $\hat{S}_z|z-\rangle = -\hbar/2|z-\rangle$ , calcule  $|\psi(t)\rangle$ .
- (c) (30%) Assuma agora que  $|\psi(t=0)\rangle = |x+\rangle$ , onde  $\hat{S}_x|x+\rangle = \hbar/2|x+\rangle$ . Obtenha a probabilidade de, em uma medição de  $\hat{S}_x$  em um instante  $t > 0$ , que a partícula seja encontrada em seu estado inicial,  $|x+\rangle$ .
- (d) (10%) A chamada “oscilação de Rabi” corresponde à variação periódica da probabilidade de encontrar o momento magnético em uma dada direção que seja perpendicular àquela do campo aplicado. Qual o período correspondente da oscilação de Rabi para esse átomo de prata?
- (e) (30%) Para a condição inicial estabelecida no item (c), calcule  $\langle \hat{\vec{S}} \rangle(t)$ , ou seja, o valor esperado de  $\hat{\vec{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ , para um instante  $t > 0$ .

---


$$\text{Dados: } \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**QUESTÃO 3 – MOMENTO ANGULAR**

Um sistema é preparado em um estado  $\phi_{11}$ , que é autofunção dos operadores  $\hat{L}^2$  e  $\hat{L}_z$  com  $l = 1$  e  $m = 1$ , respectivamente.

- (a) (20%) Calcule os valores esperados para uma medida dos operadores  $\hat{L}_x$  e  $\hat{L}_x^2$  nesse estado.
- (b) (10%) Quais os valores possíveis de serem obtidos para uma medida do operador  $\hat{L}_x$  feita para esse estado?
- (c) (40%) Expresse as autofunções de  $\hat{L}_x$  como combinações lineares de  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{10}$  e  $\phi_{1-1}$ , autofunções de  $\hat{L}_z$ . Dica:  $\hat{L}_x = \frac{1}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-)$ .

Considere um feixe de partículas com  $l = 1$  direcionado ao longo do eixo  $y$ . Esse feixe passa então por um dispositivo tipo Stern-Gerlach,  $P_1$ , que tem seu eixo magnético orientado ao longo do eixo  $x$ . Em seguida, o feixe que emerge de  $P_1$  com  $m = 0$  é separado dos demais e feito incidir sobre um segundo dispositivo Stern-Gerlach,  $P_2$ , cujo campo magnético é direcionado ao longo do eixo  $z$ .

- (d) (20%) Quais os valores possíveis de serem obtidos em uma medida de  $\hat{L}_z$  para cada um dos feixes que emergem de  $P_2$ ? Justifique sua resposta.
- (e) (10%) Para esse feixe, que fração de partículas corresponde a cada um desses valores?

Dados:

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-),$$

$$\hat{L}_{\pm}\phi_{lm} = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\phi_{lm \pm 1},$$

$$\hat{L}^2\phi_{lm} = \hbar^2 l(l+1)\phi_{lm},$$

$$\hat{L}_z\phi_{lm} = m\hbar\phi_{lm}$$

**QUESTÃO 4 – TEORIA DE PERTURBAÇÃO**

Considere um oscilador harmônico unidimensional de massa  $m$  e frequência natural  $\omega_0$  com hamiltoniano

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 \hat{X}^2}{2}$$

submetido a uma perturbação dada pela interação

$$\hat{V} = \lambda \hat{X} f(t),$$

onde  $\lambda$  é uma constante muito pequena e  $f(t)$  é uma função a ser definida nos itens abaixo.

- (a) (40%) Assumindo que  $f(t) = 1$  em todos os instantes de tempo, calcule as correções de energia de primeira e segunda ordem do estado fundamental.

Considere para os dois itens abaixo que  $f(t)$  depende do tempo e que o sistema se encontra inicialmente ( $t = 0$ ) no estado fundamental do oscilador não perturbado ( $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ ).

- (b) (40%) Calcule a solução da equação de Schrödinger para  $t > 0$  em primeira ordem de perturbação. Escreva sua resposta em termos de uma integral do tipo  $\int_0^t dt' f(t') e^{i\omega t'}$ .

- (c) (20%) Assuma que a densidade espectral  $\tilde{\rho}(\omega)$  de  $f(t)$  seja dada por

$$\tilde{\rho}(\omega) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi t} \left| \int_0^t f(t') e^{i\omega t'} dt' \right|^2 = \rho(\omega) + \rho(-\omega),$$

com  $\rho(\omega)$  definido pela função gaussiana

$$\rho(\omega) = \sqrt{\frac{1}{\pi\omega_0^2}} e^{-(\omega-\omega_0)^2/\omega_0^2},$$

onde  $\omega_0$  é a frequência de oscilação do oscilador não perturbado. Utilizando o resultado do item (b), calcule as possíveis taxas de transição em primeira ordem de perturbação ( $dP_{0 \rightarrow n}^{(1)}/dt$ ) no limite  $t \rightarrow \infty$ .

Dados:  $\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$  e  $\hat{P} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ .